

**Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 4»**

**Рассмотрено на заседании
МО учителей
Руководитель МО**

_____/Мельникова Н.Н.
Протокол № 1
от «29»08. 2016г.

**Принято на заседании
педагогического совета
протокол №1
от «29»08. 2016 г.**

«Утверждено»

**Директор
МОУ «СОШ №4»**

_____/И.В.Колмазнин
Приказ №205 от «30»08.2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

элективного курса по математике для 9 классов

по теме «Решение текстовых задач»

Пояснительная записка

Предлагаемая программа элективного курса «Решение текстовых задач» актуальна в период перехода к новым образовательным стандартам по математике. Данный курс предназначен для более глубокого осознания методики и способов решения задач и применения полученных знаний на практике. Применение на практике различных задач, связанных с окружающей жизнью, позволяет создавать такие учебные ситуации, которые требуют от учащихся умения смоделировать математически определённые физические, химические, экономические процессы и явления.

В связи с этим, **целями** предлагаемой программы являются:

1. Расширение и углубление знаний о способах решения и средствах моделирования явлений и процессов, описанных в задачах.
2. Развитие логического мышления учащихся, их алгоритмической культуры и математической интуиции.
3. Развитие устойчивого интереса к предмету, приобщая к окружающей нас жизни.
4. Способствовать интеллектуальному развитию учащихся, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для жизни в современном обществе и решения практических проблем.

Содержание предлагаемой программы направлено на решение следующих **задач**:

1. Расширение знаний о методах и способах решения математических задач, окружающей нас жизни.
2. Формирование умения моделировать реальные ситуации.
3. Развитие исследовательской и познавательной деятельности учащихся.
4. Предоставить ученику возможность реализовать свой интерес к выбранному предмету, определить готовность ученика осваивать выбранный предмет на повышенном уровне.

Данный курс «Решение текстовых задач» задаёт примерный объём знаний, умений и навыков, которыми должны овладеть школьники.

Таким образом, содержание курса охватывает все основные типы текстовых задач. Кроме того, содержание программы предполагает возможность работы со школьниками с разными учебными возможностями за счёт подбора разноуровневых задач.

Данный элективный курс рассчитан в первую очередь на учащихся, желающих расширить и углубить свои знания по математике, сделать правильный выбор профиля обучения в старших классах. Он поможет школьникам систематизировать полученные на уроках знания по решению текстовых задач и открыть для себя новые методы их решения, которые не рассматриваются в рамках школьной программы.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО МАТЕРИАЛА КУРСА (34 часа)

Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего часов	В том числе на:			(кол-во часов)
			лекции	практика	проверочные работы	
1	Текстовые задачи и техника их решения	1	1(беседа)	-	-	
2	Задачи на движение	4	1	1	1(обучающая ср) 1(ср)	
3	Задачи на проценты	6	1	4	1(ср)	
4	Задачи на сплавы, смеси, растворы	6	1	4	1(обучающая ср)	
5	Задачи на работу	5	1	3	1(ср)	
6	Нестандартные способы решения текстовых задач	5	1	4	-	
7	Решение задач по всему курсу	6	-	5	1(решение задач в группах)	
8	Итоговый урок	1	-	1	-	
	Итого:	34	6	22	6	

Содержание тем элективного курса

Текстовые задачи и техника их решения (1 ч)

Текстовая задача. Виды текстовых задач и их примеры. Решение текстовой задачи. Этапы решения текстовой задачи. Решение текстовых задач арифметическими приемами. Решение текстовых задач методом составления уравнения, неравенства или их систем. Значение правильного письменного оформления решения текстовых задач. Решение текстовой задачи с помощью графика. Чертеж к текстовой задаче и его значение для построения математической модели.

Задачи на движение (4 ч)

Движение тел по течению и против течения. Равномерное и равноускоренное движение тел по прямой линии в одном направлении и навстречу друг другу. Движение тел по окружности в одном направлении и навстречу друг другу. Формулы зависимости расстояния, пройденного телом, от скорости, ускорения и времени в различных видах движения. Графики движения в прямоугольной системе координат. Чтение графиков движения и применение их для решения текстовых задач. Решение текстовых задач с использованием элементов геометрии. Особенности выбора переменных и методика решения задач на движение. Составление таблицы данных задачи и ее значение для составления математической модели

Задачи на проценты (6 ч)

Понятие процента. Нахождение процента от числа, числа по его проценту, составление процентного отношения. Решение типовых задач на проценты. Алгоритм решения задач методом составления уравнений. Формула начисления «сложных процентов», формула простого процентного роста. Решение задач на применение этих формул. Процентные расчеты в различных сферах деятельности. Проценты в окружающем мире (распродажи, тарифы, штрафы, банковские операции и голосование).

Задачи на сплавы, смеси, растворы (6 ч)

Формула зависимости массы или объема вещества от концентрации и массы или объема.

Особенности выбора переменных и методика решения задач на сплавы, смеси, растворы. Составление таблицы данных задачи и ее значение для составления математической модели.

Задачи на работу (5 ч)

Формула зависимости объема выполненной работы от производительности и времени ее выполнения. Особенности выбора переменных и методика решения задач на работу. Составление таблицы данных задачи и ее значение для составления математической модели.

Нестандартные способы решения текстовых задач (5 ч)

Нестандартные способы решения обычных «стандартных» задач и задач олимпиадной и конкурсной тематики, специальные приемы их решения: переформулировка задачи, использование «лишних» неизвестных, делимости и диофантовых уравнений, решение задач в общем виде (когда все или некоторые значения величин в условии обозначены буквой), метод подобия.

Решение задач по всему курсу (5 ч)

Решение задач по всему курсу.

Всего на проведение занятий отводится 34 часа. Занятия проводятся в форме обзорных лекций с разбором ключевых задач или в форме практических занятий (решение задач). Курс предусматривает проведение самостоятельных работ обучающего и контролирующего характера. Завершается курс итогово – обобщающим уроком.

Ожидаемые результаты:

После изучения курса учащиеся должны:

- Уметь определять тип текстовой задачи, знать особенности методики ее решения, использовать при решении различные способы;
- Уметь применять полученные математические знания при решении задач;
- Уметь использовать дополнительную математическую литературу;
- Приобрести навыки рассуждения, наблюдательности, умения проводить аналогии, обобщать, обосновывать, анализировать, делать выводы.

Критерии оценок следующие:

«5»-учащийся освоил теоретический материал и сознательно применяет при решении конкретных задач; в работе над индивидуальными заданиями продемонстрировал умение работать самостоятельно, творчески.

«4»- учащийся освоил идеи и методы данного курса так, что может справиться со стандартными заданиями, индивидуальные задания выполняет прилежно (без проявления творческих способностей)

«3» - учащийся освоил наиболее простые идеи и методы данного курса так, что он может выполнить простые задания.

Перечень учебно – методического обеспечения

Литература

1. Алгебра 7 – 8 классы. Тематический тренажёр. Под редакцией Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю.: Легион. Ростов – на – Дону, 2014
2. Математика. ГИА – 9, ГИА – 2015. Тренажёр для подготовки к экзамену. Под редакцией Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю.: Легион. Ростов – на – Дону, 2014

3. Булынин В. Применение графических методов при решении текстовых задач. Математика, 2005, № 14.
4. Шевкин А. Текстовые задачи в школьном курсе математики 5-9 классы (лекции 1-8). Математика, 2005, № 17- № 24.
5. Элективные курсы для предпрофильной подготовки. Математика, 2007, № 14.
6. Балаян Э. Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы. 2005.
7. Тестовые задания за 2013 -2014 годы.
8. С. А. Шестаков, Д. Д. Гущин: «Задачи на составление уравнений» 2011-2012 год

Перечень интернет-ресурсов (материалы сайтов):

1. www.pms.ru/programmyi/15.html сайт школы А.Н.Колмогорова.
2. <http://1september.ru> материалы сайта «Фестиваль педагогических идей».
3. <http://www.ege.edu.ru>
4. <http://rustest.ru>
5. www.fipi.ru
6. <http://www.pritchi.nm.ru>

Календарно-тематическое планирование

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего часов	Дата	Коррек тировка	Виды уроков и формы контроля	Приме чание
1	Текстовые задачи и техника их решения	1			Беседа	
2	Задачи на движение	1			Изучение нового материала	
3	Задачи на движение	1			Комбинированный	ОбСР 1
4	Задачи на движение	1			Обобщение и систематизация знаний	
5	Задачи на движение	1			Обобщение и систематизация знаний	СР 2
6	Задачи на проценты	1			Изучение нового материала	
7	Задачи на проценты	1			Комбинированный	
8	Задачи на проценты	1			Комбинированный	
9	Задачи на проценты	1			Обобщение и систематизация знаний	
10	Задачи на проценты	1			Обобщение и систематизация знаний	СР 3
11	Задачи на проценты	1			Обобщение и систематизация знаний	
12	Задачи на сплавы, смеси, растворы	1			Комбинированный	ОбСР 4
13	Задачи на сплавы, смеси, растворы	1			Изучение нового материала	
14	Задачи на сплавы, смеси, растворы	1			Комбинированный	
15	Задачи на сплавы, смеси, растворы	1			Комбинированный	
16	Задачи на сплавы, смеси, растворы	1			Обобщение и систематизация знаний	
17	Задачи на сплавы, смеси, растворы	1			Обобщение и систематизация знаний	
18	Задачи на работу	1			Изучение нового материала	
19	Задачи на работу	1			Комбинированный	
20	Задачи на работу	1			Комбинированный	

21	Задачи на работу	1			Обобщение и систематизация знаний	
22	Задачи на работу	1			Обобщение и систематизация знаний	СР 5
23	Нестандартные способы решения текстовых задач	1			Изучение нового материала	
24	Нестандартные способы решения текстовых задач	1			Изучение нового материала	
25	Нестандартные способы решения текстовых задач	1			Обобщение и систематизация знаний	
26	Нестандартные способы решения текстовых задач	1			Обобщение и систематизация знаний	
27	Нестандартные способы решения текстовых задач	1			Обобщение и систематизация знаний	
28	Решение задач по всему курсу	1			Обобщение и систематизация знаний	
29	Решение задач по всему курсу	1			Обобщение и систематизация знаний	
30	Решение задач по всему курсу	1			Обобщение и систематизация знаний	
31	Решение задач по всему курсу	1			Обобщение и систематизация знаний	СР 6
32	Решение задач по всему курсу	1			Обобщение и систематизация знаний	
33	Решение задач по всему курсу	1			Обобщение и систематизация знаний	
34	Итоговый урок	1			Обобщение и систематизация знаний	
	Итого	34				

Дидактические материалы к элективному курсу

Тема 1. Текстовые задачи и техника их решения.

Типы задач:

1. Изменение величины и сравнение её значений.
2. Задачи на работу.
3. Задачи на движение двух тел.
4. Задачи на смеси и сплавы.

Алгоритм решения текстовых задач.

- Ввод переменных, т.е. обозначение буквами $x, y, z, \dots$ величины, которые требуется найти по условию задачи.
- Перевод условий задачи на язык математических соотношений, т.е. составление уравнений, неравенств, введение ограничения.
- Решение уравнений или неравенств.
- Проверка полученных решений на выполнение условий задачи.

Указания к решению текстовых задач

- Набор неизвестных должен быть достаточным для перевода условий задачи на язык математических соотношений. Как правило, за неизвестные следует принимать искомые величины.
- Выбрав неизвестные, в процессе перевода условий задачи в уравнения или неравенства необходимо использовать все данные и условия задачи.
- При составлении уравнений или неравенств необходимо исходить из требования о решении задачи в общем виде.
- В составленных уравнениях надо проверить размерность членов уравнений
- В процессе решения задачи, надо избегать результатов, противоречащих физическому смыслу.

Тема 2. Задачи на движение

При решении задач на движение используются формулы: $S = v \cdot t$, $v = \frac{S}{t}$, $t = \frac{S}{v}$.

При этом надо иметь в виду, что указанные величины должны быть в одной системе единиц. В задачах на движение по реке необходимо помнить формулы:

$$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$$

$$v_{\text{противтеч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$$

Кроме того, что если два тела начинают движение одновременно, то в случае, если они встречаются, каждое с момента выхода и до встречи затрачивают одинаковое время. Точно также обстоит дело в случае, если одно тело догоняет другое. Если же тела выходят в разное время, то до момента встречи из них затрачивает времени больше то, которое выходит раньше.

ЗАДАЧА 1. Пешеход, идущий из совхоза на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км,

рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от совхоза до станции и с какой постоянной скоростью на всем пути пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

РЕШЕНИЕ. Составим таблицу:

	Расстояние, км.	Скорость, км/ч.	Время, ч.
Точно	X	v	$\frac{x}{v}$
С опозданием	X - 3	3	$\frac{x-3}{3}$
С опережением	X-3	4	$\frac{x-3}{4}$

Заметим, что 15 мин = $\frac{1}{4}$ ч, а 40 мин = $\frac{2}{3}$ ч.

Тогда, уравнивая промежутки времени, записанные в таблице, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{v} = \frac{x-3}{3} + 1 - \frac{2}{3}, \\ \frac{x}{v} = \frac{x-3}{4} + 1 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Сравнивая правые части уравнений системы, имеем

$$\frac{x-3}{3} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{x-3}{4} + 1 + \frac{1}{4}$$

или

$$4x - 12 + 4 = 3x - 9 + 15, \quad x = 14, \quad \text{тогда } v = \frac{14}{4} = 3,5 \text{ (км/ч)}$$

Ответ: 14 км, 3,5 км/ч.

ЗАДАЧА 2. Велосипедист и пешеход вышли из пунктов А и В, расстояние между которыми 12 км, и встретились через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт А на 1ч 36 мин позже, чем велосипедист в пункт В. Найти скорость пешехода.

РЕШЕНИЕ. Обозначим через x км/ч скорость пешехода. Тогда 12 км из В в А пешеход пройдет за $12/x$ ч, а велосипедист это же расстояние из А в В на 1ч 36 мин=1,6ч быстрее, т. е. за $12 : \left(\frac{12}{x} - 1,6 \right)$ ч со

скоростью $12 : \left(\frac{12}{x} - 1,6 \right) = \frac{12x}{12 - 1,6x} = \frac{3x}{3 - 0,4x}$ км/ч. Велосипедист и пешеход, двигаясь навстречу друг

другу, расстояние 12 км прошли за 20 мин = $\frac{1}{3}$ ч.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{3 - 0,4x} = 12 \text{ или } 0,4x^2 - 20,4x + 108 = 0, \quad x^2 - 51x + 270 = 0, \text{ откуда } x_1 = 6, x_2 = 45.$$

Значение $x = 45$ невозможно, так как x – скорость пешехода.

Ответ: 6 км/ч.

ЗАДАЧА 3. Найти длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

РЕШЕНИЕ. Пусть x – длина поезда, тогда скорость поезда мимо неподвижного пассажира будет $\frac{x}{7}$

м/с, а скорость поезда мимо платформы будет $\frac{x+378}{25}$ м/с. Согласно условию задачи эти скорости равны, т. е. имеем уравнение:

$$\frac{x}{7} = \frac{x+378}{25} \text{ или } 25x - 7x = 378 \cdot 7, \text{ откуда } x = 147. \text{ Следовательно, длина поезда } 147 \text{ м.}$$

Ответ: 147 м.

ЗАДАЧА 4. Моторная лодка прошла 5 км по течению и 6 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найти скорость лодки по течению.

РЕШЕНИЕ. Пусть собственная скорость движения лодки x км/ч, где $x > 0$. Составим таблицу.

	Скорость, км/ч.	Расстояние, км.	Время, ч.
По течению	$x+3$	5	$\frac{5}{x+3}$
Против течения	$x-3$	6	$\frac{6}{x-3}$

Так как на весь путь моторная лодка затратила 1 ч, то получим уравнение:

$$\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 1,$$

$$\begin{cases} 5(x-3) + 6(x+3) = x^2 - 9, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

$$5x - 15 + 6x + 18 = x^2 - 9 \text{ или } x^2 - 11x - 12 = 0, \text{ откуда } x_1 = 12, x_2 = -1 \text{ (не подходит, так как } x > 0).$$

Если $x = 12$, то $x + 3 = 15$. Итак, скорость лодки по течению реки 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

ЗАДАЧА 5. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. Сколько времени понадобится каждому из них, чтобы пройти все расстояние, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

РЕШЕНИЕ. Так как в задаче нет никаких данных о пройденном расстоянии, то все расстояние примем за 1. Тогда скорость первого пешехода будет $v_1 = \frac{1}{x}$, а второго – $v_2 = \frac{1}{y}$, где x часов – время в пути первого пешехода, а y часов – время второго пешехода.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ x - y = 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решая полученную систему способом подстановки, получим $x = 10, y = 5$.

Ответ: 10 ч, 5 ч.

Задача 6. (Средняя скорость движения) Средней скоростью движения на некотором участке пути называют постоянную скорость, с которой можно тот же участок пути пройти за то же время.

Турист шёл со скоростью A км/ч, а точно такое же время со скоростью B км/ч. Какова средняя скорость движения туриста на всём участке пути?

Решение:

Пусть турист шёл X км со скоростью A км/ч и столько же X ч – со скоростью B км/ч. Тогда за $2X$ ч он прошёл $AX + BX = X(A + B)$ км. Средняя скорость туриста равна:

$$\frac{(A+B)X}{2X} = \frac{A+B}{2} \text{ км/ч.}$$

Задача 7. Автомобиль ехал из А в В порожняком со скоростью 60 км/ч, а возвращался с грузом со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость движения на всём участке движения.

Задача 8. В гору велосипедист ехал со скоростью 10 км/ч, а с горы с некоторой другой скоростью. Как он подсчитал, средняя скорость движения была 12 км/ч. С какой скоростью он ехал с горы?

Решение в общем виде:

$$X = \frac{2tk}{k-t}$$

Задача 9. Расстояние между двумя пунктами 12 км. Из них одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста со скоростями 10 км/ч и 8 км/ч. Каждый из них доехал до другого пункта, повернул и поехал назад с той же скоростью. Через сколько часов после начала движения они встретятся во второй раз?

Приведем «длинное» решение задачи 10 (1) без пояснений.

$$1) 30:10 = 3(\text{ч}); \quad 4) 10 + 5 = 15 (\text{км/ч});$$

$$2) 5-3 = 15 (\text{км}); \quad 5) 15:15 = 1 (\text{ч});$$

$$3) 30 - 15 = 15 (\text{км}); \quad 6) 3 + 1 = 4 (\text{ч}).$$

Его можно упростить, заметив, что в задаче речь идет по сути дела о движении навстречу друг другу с удвоенного расстояния. Тот же ответ получится, если переформулировать условие задачи следующим образом: «Расстояние между пунктами А и В равно 60 км. Из пункта А в пункт В вышел пешеход со скоростью 5 км/ч. Одновременно с ним из В в А выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Через сколько часов после начала движения они встретятся?».

$$1) 30-2 = 60 (\text{км});$$

$$2) 10 + 5 = 15 (\text{км/ч});$$

$$3) 60:15 = 4 (\text{ч}).$$

Это пример удачной переформулировки задачи, приводящей к упрощению ее решения.

Задачи для самостоятельной работы

1. Расстояние между городами А и В по шоссе равно 50 км. Из города А в город В отправился велосипедист, а через 1 ч 3 мин вслед за ним отправился мотоциклист, который обогнал велосипедиста и прибыл в город В на 1 ч раньше его. Найти скорость каждого, зная, что мотоциклист двигался со скоростью в 2,5 раза большей, чем велосипедист.
2. Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 1 ч 30 мин. Если его скорость увеличить на 10 км/ч, то это же расстояние электропоезд пройдет за 1 ч 20 мин. Определить расстояние между станциями.
3. Пассажир, ехавший в поезде со скоростью 40 км/ч, заметил, что встречный поезд проехал мимо за 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.
4. Переднее колесо повозки на некотором расстоянии сделало на 15 оборотов больше заднего. Окружность переднего колеса равна 2,5 м, а заднего – 4 м. Сколько оборотов сделало каждое колесо и какое расстояние проехала повозка?
5. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч после отправления поезда встретятся. Если же первый поезд отправится на 4 ч 20 мин раньше второго, то встреча произойдет через 8 ч после отправления второго поезда. Найти скорость каждого поезда.
6. По окружности, длина которой 999 м, движутся два тела по одному и тому же направлению и встречаются через каждые 37 мин. Определить скорость каждого тела, если известно, что скорость

первого в 4 раза больше скорости второго.

7. Лодка против течения прошла 22,5 км и по течению 28,5 км, затратив на весь путь 8ч. Определить скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2,5 км/ч.

8. Из пункта А отправили по течению реки плот. Через 5ч 20 мин вслед за плотом из того же пункта вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Найти скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки на 12 км/ч больше скорости плота.

9. Поезд должен был пройти 840 км. В середине пути он был задержан на 30 мин, а потому, чтобы прибыть вовремя, должен был увеличить скорость на 2 км/ч. Сколько времени поезд затратил на весь путь?

10. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов А и В, расстояние между которыми 28 км, и встретились через час. С какой скоростью двигался каждый велосипедист, если один прибыл в пункт В на 35 мин позже, чем другой в пункт А?

11. Два поезда выходят одновременно из пунктов М и N, расстояние между которыми 45 км, и встречаются через 20 мин. Поезд вышедший из М, прибывает на станцию N на 9 мин раньше, чем другой поезд в М. Какова скорость каждого поезда?

Тема 3. Задачи на проценты

1. Процент – сотая часть числа.

2. Чтобы найти $p\%$ от всего числа, надо всё число умножить на 0.01р.

3. Чтобы найти всё число по его $p\%$ процентам, надо известное число разделить на 0.01р.

4. Чтобы найти сколько процентов одно число составляет от другого, надо одно число разделить на другое и умножить на 100%.

Задача 1. Сколько процентов соли содержится в растворе, если в 200г. раствора содержится 150г. воды?

Решение:

1) $200-150=50(\text{г.})$ – соли

2) $\frac{50 \cdot 100\%}{200} = 25\%$ - соли

Ответ: 25%

ЗАДАЧА 2. Если из 225 кг руды получается 34,2 кг меди, то каково процентное содержание меди в руде?

РЕШЕНИЕ.

Если 225 кг руды - 100 %, то

34,2 кг – x %, откуда

$$x = 34,2 \cdot 100 : 225 \text{ или } x = 15,2 \%$$

Ответ: 15,2%.

ЗАДАЧА 3. Цену товара сперва снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение ее на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

РЕШЕНИЕ.

Пусть x руб. – первоначальная цена товара, что соответствует 100%. Тогда после I снижения цена товара будет $x - 0,2x = 0,8x$ (руб.).

После II снижения $0,8x - 0,15 \cdot 0,8x = 0,68x$ (руб.), а после III снижения $0,68x - 0,68x \cdot 0,1 = 0,612x$ (руб.).

Всего цена товара снизилась на $x - 0,612x = 0,388x$ (руб.).

Итак, $x - 100\%$,

$0,388x - y$, откуда имеем $y = (0,388 \cdot 100\%) : x = 38,8\%$. Таким образом, первоначальную цену

товара снизили всего на 38,8 %.

Ответ: на 38,8 %.

ЗАДАЧА 4. Антикварный магазин, купив два предмета за 225000 руб., продал их, получив 40% прибыли. Что стоит магазину каждый предмет, если на первом прибыли получено 25%, а на втором 50%?

РЕШЕНИЕ.

Пусть I предмет куплен за x руб., тогда II куплен за $(225000 - x)$ руб. При продаже I предмета получено 25% прибыли. Значит, он продан за $1,25x$ руб.

Второй предмет, на котором получено 50% прибыли, продан за $1,5 \cdot (225000 - x)$ руб. По условию общий % прибыли (по отношению к покупной цене 225000 руб.) составлял 40%. Значит, общая сумма выручки была $1,40 \cdot 225000 = 315000$ руб.

Имеем уравнение $1,25x + 1,5(225000 - x) = 315000$. Умножая обе части уравнения на 4, получим $5x + 6(225000 - x) = 315000 \cdot 4$,

или $6x - 5x = 6 \cdot 225000 - 4 \cdot 315000$, откуда

$x = 90000$, тогда $225000 - x = 135000$.

Итак, I предмет куплен за 90000 руб., II – за 135000 руб.

Ответ: 90000 руб., 135000 руб.

ЗАДАЧА 5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$ м. Определить катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}\%$, а другой на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин сделается равной 14 м.

РЕШЕНИЕ.

Пусть длины катетов (в метрах) – x и y . Так как гипотенуза равна $3\sqrt{5}$ м, то по теореме Пифагора получим уравнение $x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2$ или $x^2 + y^2 = 45$.

После увеличения на $133\frac{1}{3}\%$, т.е. на $133\frac{1}{3} : 100 = 1\frac{1}{3}$ своей длины, I катет станет равным $2\frac{1}{3}x$, а II катет после увеличения на $16\frac{2}{3}\%$ будет равен $1\frac{1}{6}y$. Получим уравнение:

$$2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14.$$

В итоге имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ \frac{7}{3}x + \frac{7}{6}y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2x + y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (12 - 2x)^2 = 45, \\ y = 12 - 2x; \end{cases}$$

откуда находим $x = 3, y = 6$.

Ответ: 3 м, 6 м.

ЗАДАЧА 6. При выполнении работы по математике 12% учеников класса вовсе не решили задачи, 32% решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

РЕШЕНИЕ.

Верно решившие 14 человек составляют $100\% - (12\% + 32\%) = 56\%$ всех учеников класса. Тогда общее число учеников класса будет равно $14 \cdot 100 : 56 = 25$ (учеников).

Ответ: 25 учеников.

Простые проценты.

Обозначим через A_0 сумму первоначального вклада. Банк обязуется выплачивать вкладчику в конце каждого $p\%$ (годовая процентная ставка) от первоначальной суммы A_0 . По истечении одного года

величина вклада станет равной $A = A_0(1 + \frac{p}{100})$ рублей. Если по прошествии каждого года вкладчик снимает со счёта начисленные проценты, то через n лет на вкладе по формуле простого процента будет:

$$A_n = A_0(1 + \frac{pn}{100}).$$

Задача 7. Банк выплачивает вкладчикам каждый год 8% от внесённой суммы. Клиент сделал вклад в размере 200000р. Какая сумма будет на его счёте через 5 лет, 10 лет?

Решение:

Используя формулу : $A_n = A_0(1 + \frac{pn}{100})$

$$A_5 = 200000(1 + \frac{5 \cdot 8}{100}) = 280000 \text{ (р)}$$

$$A_{10} = 200000(1 + \frac{10 \cdot 8}{100}) = 360000 \text{ (р)}$$

Ответ: 280000 р., 360000 р.

Сложные проценты

Если обозначить через A_0 сумму первоначального вклада, A_n - сумма, которая будет на вкладе к концу n -го года, то при начислении $p\%$ годовых, не снимая со счёта сумму начисленных процентов, можно пользоваться формулой сложных процентов:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Задача 8. Банк предлагает вклад «студенческий». По этому вкладу сумма, имеющаяся на 1 января, ежегодно увеличивается на одно и то же число процентов. Вкладчик вложил 1 января 1000 рублей и в течение 2 лет не производил со своим вкладом никаких операций. В результате вложенная им сумма увеличилась до 1210 рублей. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма денег, положенная на этот вклад?

Решение:

Пусть на $a\%$ ежегодно увеличивается сумма денег, положенная на «студенческий» вклад. Так как было положено 1000 рублей, а к концу второго года получилось 1210 рублей, то $A_0 = 1000$; $A_2 = 1210$; $n = 2$.

Решим уравнение :

$$1210 = 1000 \left(1 + \frac{a}{100}\right)^2.$$

$$a = 10.$$

Ответ : 10%.

Задача 9. Рассчитайте, что выгоднее для вкладчика: получить 20 000 рублей сегодня или получить 35 000 рублей через 3 года, если процентная ставка равна 17%.

Рассчитаем будущую стоимость 20000 рублей через 3 года, под 17% годовых.

$$A_3 = 20000 * (1 + 0,17)^3 = 32032 \text{ рубля.}$$

Ответ. Получить 35000 рублей через 3 года является более выгодным решением, при данном значении процентной ставки.

Задача 10. Какой должна быть ставка ссудного процента, чтобы 10000 рублей дошли до 30000 рублей, за срок вклада 5 лет?

Ответ. 10 000 рублей дойдут до 30 000 рублей за 5 лет при ставке ссудного процента 24,573%

Тема 4. Задачи «на сплавы и смеси»

Задачи этого раздела вызывают наибольшие затруднения. Речь в этих задачах идет о составлении смесей, сплавов, растворов и т. д. Решение этих задач связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «влажность» и т. д.

Смесь состоит из «чистого вещества» и «примеси». Долей a чистого вещества в смеси называется отношение количества чистого вещества m в смеси к общему количеству M смеси при условии, что они измерены одной и той же единицей массы или объема: $a=m/M$.

Процентным содержанием чистого вещества в смеси c называют его долю, выраженную процентным отношением: $c=a \cdot 100\%$.

ЗАДАЧА 1. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

РЕШЕНИЕ.

Пусть было взято x граммов 30% -ного раствора, а 10%-ного - y граммов, тогда $x + y = 600$. Так как первый раствор 30% -ный, то в x граммах этого раствора содержится $0,3x$ грамма кислоты. Аналогично в y граммах 10%-ного раствора содержится $0,1y$ грамма кислоты. В полученной смеси по условию задачи содержится $600 \cdot 0,15 = 90$ г кислоты, следовательно, получим уравнение:

$$0,3x + 0,1y = 90 \text{ или } 3x + y = 900$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим $2x = 900 - 600$; откуда $x = 150$, тогда $y = 600 - 150 = 450$.

Ответ: 150 г, 450г.

ЗАДАЧА 2. Вычислить массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3кг чистого серебра, получим сплав 900-й пробы (т. е. в сплаве 90% серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получили сплав 840-й пробы.

РЕШЕНИЕ.

Пусть масса данного сплава x кг, в нем содержится y % серебра: $0,01xy$ кг серебра находится в данном сплаве, $(x + 3)$ кг – масса нового сплава, в нем содержится $(0,01xy + 3)$ кг серебра.

Так как новый сплав 900-й пробы, значит, в нем содержится серебра $0,9(x + 3)$ кг. Следовательно, имеем уравнение $0,01xy + 3 = 0,9(x + 3)$.
 $(x + 2)$ кг – масса III сплава 840-й пробы. В нем содержится $0,84(x + 2)$ кг серебра. Но этот сплав состоит из x кг данного ($0,01xy$ серебра) и 2 кг 900-й пробы (1,8 кг серебра). Получим второе уравнение: $0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2)$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,01xy + 3 = 0,9(x + 3), \\ 0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2) \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения системы II, получим

$3 - 1,8 = 0,9(x + 3) - 0,84(x + 2)$ или, упрощая, находим $x = 3$. Подставив значение $x = 3$ в I уравнение системы, находим $y = 80$.

Значит, данный сплав массой 3 кг содержит 80% серебра.

Ответ: масса сплава 3 кг 800-й пробы.

ЗАДАЧА 3. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

РЕШЕНИЕ.

Пусть x кг – масса олова, которую надо добавить к сплаву. Тогда получится сплав массой $(12 + x)$

кг, содержащий 40% меди. Значит, в новом сплаве имеется $\frac{12+x}{100} \cdot 40$ кг меди. Исходный сплав массой 12кг содержал 45% меди, т. е. меди в нем было $\frac{12}{100} \cdot 45$ кг. Так как масса меди и в первоначальном, и в новом сплаве одна и та же, то получим уравнение

$$\frac{12+x}{100} \cdot 40 = \frac{12}{100} \cdot 45 \quad \text{или} \quad 8(12+x) = 9 \cdot 12, \quad \text{откуда находим } x = 1,5. \quad \text{Следовательно, к}$$

исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

Ответ: 1,5 кг.

Задача 4. При смешивании первого раствора сахара, концентрация которого 25%, и второго раствора сахара, концентрация которого 35%, получили раствор, содержащий 32,5 % сахара. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

Решение:

Пусть масса первого раствора – x литров, второго – y литров, то первый раствор содержит $0,25x$ л сахара, а второй – $0,35y$ л сахара, то общая масса сахара равна их сумме. С другой стороны, масса полученного раствора равна $(x+y)$ л, в нем содержится $0,325(x+y)$ л сахара, то получим уравнение $0,25x + 0,35y = 0,325(x+y)$. Раскрывая скобки и перенеся слагаемые с x в левую, с y – в правую, получим:

$$0,075x = 0,025y \quad / : 0,075x$$

$$x/y = 1/3$$

Ответ: 1/3.

Задачи на концентрацию.

Формула концентрации смеси (сплава) :

$$n = \frac{m_g}{m_p},$$

n – концентрация,

m_g - масса вещества в растворе (сплаве),

m_p - масса всего раствора.

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет $p\%$, то это означает, что масса этого вещества составляет $p\%$ от массы всего соединения.

Отношения объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси называется объемной концентрацией этой компоненты.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна 1. В этом случае концентрация – безразмерная величина.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле: $\frac{p}{100\%}$

n - концентрация вещества;

p - процентное содержание вещества (в процентах).

Задача 5. К 20кг. 12%-раствора соли добавили 3кг. соли. Сколько надо долить воды, чтобы концентрация соли в растворе не изменилась.

1) $0.12 \cdot 20 = 2.4$ (кг.) – масса соли в первоначальном растворе

2) $2.4 + 3 = 5.4$ (кг.) – масса соли в полученном растворе

Пусть X (л.) воды требуется долить.

Запишем пропорцию:

$$\frac{20}{20+X} = \frac{2.4}{5.4}$$

$$20 \quad 2.4$$

$$2.4(20+X) = 5.4 \cdot 20$$

$$48 + 2.4x = 108$$

$$2.4x = 60$$

$$x = 25 \text{ (кг.)}$$

Ответ: 25 (кг.)

Задача 6. Если смешать 8 кг и 2 кг растворов серной кислоты разной концентрации, то получим 12% раствор кислоты. При смешивании двух одинаковых масс тех же растворов получим 15% раствор. Определите первоначальную концентрацию каждого раствора.

Ответ: 10%-й и 20%-й растворы.

Задача 7. Сколько граммов надо добавить к 100 г. 30%-й соляной кислоты, чтобы получить 10%-кислоту?

Задача 8. К раствору, содержащему 39 г. соли, добавили 1 л. воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найти первоначальную концентрацию соли в растворе

Задача 9. В колбе было 800 г 80% спирта. Провизор отлил из колбы 200 г этого спирта и добавил в неё 200 г воды. Определите концентрацию (в %) полученного спирта.

Задача 10. При смешивании первого раствора сахара, концентрация которого 25%, и второго раствора сахара, концентрация которого 35%, получили раствор, содержащий 32,5 % сахара. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

Решение:

Пусть масса первого раствора – x литров, второго – y литров, то первый раствор содержит $0,25x$ л сахара, а второй – $0,35y$ л сахара, то общая масса сахара равна их сумме. С другой стороны, масса полученного раствора равна $(x+y)$ л, в нем содержится $0,325(x+y)$ л сахара, то получим уравнение $0,25x + 0,35y = 0,325(x+y)$. Раскрывая скобки и перенеся слагаемые с x в левую, с y – в правую, получим:

$$0,075x = 0,025y \quad / : 0,075x$$

$$x/y = 1/3$$

Ответ: 1/3.

Задачи «на разбавление»

ЗАДАЧА 1. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; после этого в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй, если вместимость бака 64 л?

РЕШЕНИЕ.

Если в первый раз вылили x л спирта, то осталось $(64 - x)$ л спирта. Когда долили бак водой, получили 64 л смеси спирта и воды, в которой содержится $(64 - x)$ л спирта. Затем x л спирта смеси вылили, значит, вылили и спирт.

$\frac{x(64 - x)}{64}$ л спирта вылили во второй раз, $(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64}$ л осталось в баке.

Так как в баке осталось 49 л спирта, то можно составить уравнение:

$$(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64} = 49,$$

$$64(64 - x) - x(64 - x) = 64 \cdot 49,$$

$$64(64 - x) - x(64 - x) = 64 \cdot 49,$$

$$(64 - x)^2 = 64 \cdot 49, \text{ или } 64 - x = \pm 56, \text{ откуда } x_1 = 8, x_2 = 120 \text{ (не удовлетворяет условию задачи).}$$

Итак, в первый раз вылили 8 л спирта, а во второй $\frac{8(64 - 8)}{64} = \frac{8 \cdot 56}{64} = 7$ (л) спирта.

Ответ: 8 л; 7 л.

ЗАДАЧА 2. Сосуд емкостью 8 л наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось кислорода 9%. Определить, по сколько литров выпускалось каждый раз из сосуда.

РЕШЕНИЕ.

Пусть из сосуда выпущено x л воздуха и введено такое же количество азота. В оставшемся количестве $(8 - x)$ л воздуха содержится $(8 - x) \cdot 0,16$ л кислорода. Это количество приходится на 8 л

смеси, так что на 1 л приходится $\frac{0,16(8 - x)}{8}$ л кислорода. Следовательно, когда вторично x л смеси

заменяется x л азота, остающееся количество $(8 - x)$ л смеси содержит

$\frac{0,16(8 - x)}{8} \cdot (8 - x) = 0,02(8 - x)^2$ л кислорода. Значит, по отношению к общему количеству смеси (8

л) содержание кислорода составляет

$$\frac{0,02(8 - x)^2}{8} \cdot 100 = \frac{(8 - x)^2}{4}. \text{ Согласно условию, получим уравнение:}$$

$$\frac{(8 - x)^2}{4} = 9, \text{ откуда } (8 - x)^2 = 36, 8 - x = \pm 6, \text{ то есть } x_1 = 2, x_2 = 14.$$

Очевидно, что 14 л выпустить из сосуда, в котором было 8 л, невозможно.

Значит, каждый раз из сосуда выпускали по 2 л смеси.

Ответ: 2 л.

Тема 5. Задачи на работу

Задачи на «совместную работу»

При решении задач на работу нередко в условии задачи говорится о выполнении некоторого задания без указания конкретных единиц, в которых измеряется работа. В этом случае обычно принимают всю работу за единицу: $A=1$. Как правило, для составления уравнения или системы уравнений, буквами обозначаются в первую очередь производительности участников работы, а остальные величины вводятся по мере необходимости.

Некоторые указания к задачам на совместную работу.

1. Основными компонентами этого типа задач являются:
 - а) работа;
 - б) время;
 - в) производительность труда (работа, выполненная в единицу времени).
2. План решения задачи обычно сводится к следующему:
 - а) Принимаем всю работу, которую необходимо выполнить, за 1, если речь идет о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане.
 - б) Находим производительность труда каждого рабочего в отдельности, т. е. $1/t$, где t – время, за которое указанный рабочий может выполнить всю работу, работая отдельно.
 - в) Находим ту часть всей работы, которую выполняет каждый рабочий отдельно, за то время, которое он работал.
 - г) Составляем уравнение, приравнявая объем всей работы (т. е. 1) к сумме слагаемых, каждое из которых есть часть всей работы, выполненная отдельно каждым из рабочих (если в условии сказано, что при совместной работе всех рабочих выполнен весь объем работы).
3. Следует заметить, что в указанных задачах не всегда сравнивается выполненная работа. Основанием для составления уравнения может служить также указанное в условии соотношение затраченного времени или производительности труда.

ЗАДАЧА 1. Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы I бригада получила другое задание, поэтому II бригада закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. На сколько дней II бригада убрала бы весь урожай быстрее I, если бы каждая бригада работала отдельно?

РЕШЕНИЕ.

Обозначим весь урожай через 1. Пусть I бригада может убрать весь урожай за x дней, а II – за y дней.

Тогда производительность труда I бригады будет $-\frac{1}{x}$, а II – $\frac{1}{y}$ это часть урожая, которую убирает каждая бригада ежедневно.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ \frac{8}{12} + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 7 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{28}, \\ y = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 28, \\ y = 21; \end{cases}$$

Итак, I бригада убереет весь урожай за 28 дней, а II – за 21 день, т. е. II бригада весь урожай убереет на 7 дней быстрее I.

Ответ: 7 дней.

ЗАДАЧА 2. Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно, за 2 ч. За сколько часом может наполнить бассейн I труба, если она, действуя одна, наполняет бассейн на 3ч быстрее, чем II?

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через x время наполнения бассейна I трубой. Заметим, что, в каких единицах измеряется объем бассейна, в задаче не сказано. Следовательно, для решения задачи это неважно, и мы

вместо условных единиц и обозначения V можем принять в принципе любое число, из которого самое удобное – 1. Составим таблицу.

Величины	Процессы заполнения бассейна		
	I трубой	II трубой	I и II вместе
V	1	1	1
$N, 1/\text{ч}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{3}{x+3}$	$\frac{1}{2}$
$t, \text{ч}$	$x ?$	$x+3$	2

N – работа в единицу времени;

$$V = N \cdot t;$$

$$N_{\text{совм.}} = N_I + N_{II};$$

$$t_{\text{совм.}} < t_I + t_{II}$$

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}, \text{ где } x \neq 0, x \neq -3.$$

Решая уравнение, находим

$x_1 = 3, x_2 = -2$ (не удовлетворяет условию задачи). Значит, I труба наполняет бассейн за 3 ч.

Ответ: 3 ч.

ЗАДАЧА 3. Первому трактору на вспашку всего поля требуется на 2 ч меньше, чем третьему, и на 1 ч больше, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1 ч 12 мин. Какое время на вспашку поля будет затрачено при совместной работе всех трех тракторов?

РЕШЕНИЕ.

Пусть x ч – время, необходимое для вспашки поля I трактору, y ч – II трактору и z ч – III трактору.

Примем площадь всего поля за 1, тогда $\frac{1}{x}$ – производительность I, $\frac{1}{y}$ – II, $\frac{1}{z}$ – III трактора.

Согласно условию задачи имеем

$$z - x = 2 \text{ и } x - y = 1.$$

Так как 1 ч 12 мин = $\frac{6}{5}$ ч, то за это время I трактор выполнит $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{5x}$ часть работы, а II –

$\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{y} = \frac{6}{5y}$ – часть работы. Следовательно, имеем уравнение $\frac{6}{5x} + \frac{6}{5y} = 1$ или $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$. Таким

образом, задача сводится к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} z - x = 2, \\ x - y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + 2, \\ y = x - 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Решив третье уравнение системы, находим $x_1 = 3, x_2 = -0,4$ (не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$).

Если $x = 3$, то $z = 5$ и $y = 2$. Следовательно, при совместной работе трех тракторов производительность труда составит $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$, тогда время на вспашку поля тремя тракторами

составит $\frac{30}{31}$ ч.

Ответ: $\frac{30}{31}$ ч.

Задача 4. Два экскаватора разной мощности, работая совместно, выполняют работу за 6 часов. Если первый проработает 4 часа, а затем второй 6 часов, то они выполнят 80% всей работы. За какое время каждый экскаватор отдельно может выполнить всю работу?

Решение:

Пусть X -производительность первого экскаватора, а Y - производительность второго экскаватора. Вся работа-1.

Так как экскаваторы работают совместно 6ч с производительностью $X+Y$ и выполняют всю работу, то составим уравнение: $(X+Y)6=1$.

Первый экскаватор работает 4ч с производительностью X ., а затем 6ч второй экскаватор с производительностью Y , и выполняют 0,8 всей работы, то $4X+6Y=0,8$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (X + Y)6 = 1, \\ 4X + 6Y = 0,8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{10}, \\ Y = \frac{1}{15}. \end{cases}$$

Поскольку время, необходимое для выполнения всей работы, и производительность связаны

соотношением $t_1 = \frac{1}{X}$, $t_2 = \frac{1}{Y}$, то $t_1=10$ ч, $t_2=15$ ч.

Ответ: 10ч, 15ч.

Тема 6. Нестандартные способы решения текстовых задач.

Задачи, решаемые с помощью уравнений.

Задача 1.Магазин в первый день продал половину привезённых гусей да ещё $\frac{1}{2}$ гуся; во второй день $\frac{1}{3}$ часть остатка да ещё $\frac{1}{3}$ гуся, а в третий день магазин продал оставшихся 33 гусей. Сколько всего гусей было привезено в магазин?

Решение:

Пусть было привезено в магазин x гусей. Тогда магазин продал:

1) в первый день $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ гусей;

2) во второй день $\frac{1}{3}\left(x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}$ гусей;

3) в третий день 33 гуся.

Составим уравнение и решим его.

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3} + 33 = x,$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 33 = x,$$

$$-\frac{1}{3}x + \frac{101}{3} = 0,$$

$$x=101.$$

Ответ: 101 гусь.

Задача 2. Автомобилист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и ещё 60 км, во второй он проехал $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 20 км, а в третий день он проехал $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.

Ответ: 400 км.

Задача 3. В течении года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Ответ: 10%.

Задача 4.

Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 10 км/ч, проплыла по течению 91 км и вернулась обратно. Найдите скорость течения реки, если лодка провела в пути 20 часов.

Ответ: 3 км/ч.

Задачи, решаемые с помощью систем уравнений.

Задача 5. Имеются два раствора серной кислоты в воде: первый – 40%-й, второй – 60%-й. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20% раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го раствора и 60%-го раствора?

Решение:

	Масса серной Кислоты, кг	Масса раствора	Концентрация
1-й раствор	0,4x	x	40%=0,4
2-й раствор	0,6y	y	60%=0,6
Первая смесь	0,4x+0,6y	x+y+5	$\frac{0,4x + 0,6y}{x + y + 5} = 0,2$
Вторая смесь	(0,4x+0,6y)+ +5 · 0,8 = =0,4x+0,6y+4	x+y+5	$\frac{0,4x + 0,6y + 4}{x + y + 5} = 0,7$

По условию доля серной кислоты в первой смеси равна 20%=0,2, а во второй смеси равна 70%=0,7.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{0,4x + 0,6y}{x + y + 5} = 0,2, \\ \frac{0,4x + 0,6y + 4}{x + y + 5} = 0,7. \end{cases}$$

Пусть $0,4x+0,6y=a$, $x+y+5=b$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 0,2, \\ \frac{a + 4}{b} = 0,7; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1,6 \\ b = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 1,6, \\ x + y + 5 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

1 кг –масса 40%-го раствора серной кислоты.

2 кг- масса 60%-го раствора серной кислоты.

Ответ: 1 кг, 2 кг.

Задача 6. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Ответ: 1,5 кг.

Задача 7. В реку впадает приток. Катер отходит от пункта А, находящегося на притоке, плывёт по течению 80 км до впадения притока в реку в пункте В, а затем идёт вверх по реке до пункта С. На путь от А до С он затратил 18 часов, на обратный путь – 15 часов. Найдите расстояние от В до С, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч, а собственная скорость катера 18 км/ч.

Ответ: 210 км.

Задача 8. Фирма А может выполнить заказ на производство игрушек на 4 дня быстрее, чем фирма В. За какое время может выполнить этот заказ каждая фирма, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполняют заказ в 5 раз больший?

Ответ: фирма А за 8 дней, фирма В за 12 дней

Задачи, которые решают при помощи неравенств.

Задача 9. В контейнере находятся коробки и ящики общим числом более 16. Если вдвое увеличить количество коробок и на 20 – количество ящиков, то ящиков будет больше, чем коробок.

Решение.

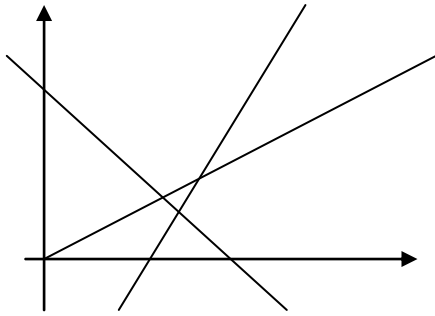
Пусть x - количество коробок, а y - количество ящиков в контейнере. По смыслу задачи x и y - натуральные числа. По условию задачи составим систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y > 16, \\ y + 20 > 2x, \\ 2y < x. \end{cases}$$

Преобразуем данную систему:

$$\begin{cases} y > 16 - x, \\ y > 2x - 20, \\ y < \frac{x}{2}. \end{cases}$$

На координатной плоскости найдём множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих этим условиям.



Точки лежащие внутри $\triangle ABC$, и будут удовлетворять данным условиям. Это одна точка с натуральными координатами $(12; 5)$. Следовательно, количество коробок может быть только 12, при этом ящиков должно быть 5.

Проверка:

$$\begin{cases} 12 + 5 > 16 - \text{верно}, \\ 5 + 20 > 2 \cdot 12 - \text{верно}, \\ 2 \cdot 5 < 12 - \text{верно}. \end{cases}$$

Ответ : 12 коробок.

Задача 10. Из пункта А в пункт В, находящийся на расстоянии 105 км от пункта А, со некоторой скоростью выезжает автобус. Через 30 минут вслед за ним из А со скоростью 40 км/ч отправляется автомобиль, который догнав автобус, поворачивает обратно. Определите скорость автобуса, при которой автомобиль возвращается в А позже, чем автобус приходит в В.

Решение.

Пусть x км – расстояние от пункта А до места встречи автобуса и автомобиля. Обозначим v км/ч скорость автобуса.

Время, которое затрачивает автобус на путь из А в В, равно $\frac{105}{v}$ ч. Время, которое затрачивает автомобиль, чтобы догнать автобус и вернуться в А, с учётом его более позднего, на 0,5 ч, отправления, составляет $\frac{2x}{40} + 0,5$ ч. По условию задачи время движения автомобиля больше времени автобуса, т.е. $\frac{2x}{40} + 0,5 > \frac{105}{v}$. По условию задачи время, затраченное автобусом на путь от А до места встречи, на 0,5 ч

больше времени, которое потребовалось автомобилю, чтобы догнать автобус, т.е. $\frac{x}{v} - \frac{x}{40} = \frac{1}{2}$, $x =$

$\frac{20v}{40 - v}$ В результате неравенство примет вид:

$$\frac{2}{40} \cdot \frac{20v}{40 - v} + \frac{1}{2} > \frac{105}{v},$$

$$\frac{v}{40 - v} + \frac{1}{2} > \frac{105}{v}.$$

как $0 < v < 40$, $0 < v < 40$, то умножая обе части неравенства на $2v(40 - v) > 0$, имеем:

$$2v^2 + (40 - v)v > 210(40 - v),$$

$$v^2 + 250v - 840 > 0,$$

Учитывая условие задачи, решение неравенства имеет вид: $v > 30$.

По условию задачи встреча произошла до пункта В, т.е. $0 < x < 105$. В результате имеем ещё одно неравенство:

$$0 < \frac{20v}{40 - v} < 105, \text{ так как } 0 < v < 40, \text{ то}$$

$$0 < 20v < 4200 - 105v,$$

$$0 < v < 33,6.$$

Учитывая, что $v > 30$, окончательный результат:

$30 < v < 33,6$, при таких скоростях, автомобиль возвращается в А позже, чем автобус приходит в В.

Ответ: $30 < v < 33,6$.

Задача 11. На реке, скорость течения которой 5 км/ч, в направлении её течения расположены пристани А, В и С, причём В находится посередине между А и С. От пристани В одновременно отходят плот, который движется по течению к пристани С, и катер, который идёт к пристани А, причём скорость катера в стоячей воде равна v км/ч. Дойдя до пристани А, катер разворачивается и движется по направлению к пристани С. Найдите все те значения v , при которых катер приходит в С позже, чем плот.

Ответ: $5 < v < 15$ км/ч.

Тема 7. Решение задач по всему курсу.

Задача 1. (на производительность) В бассейн проведена труба. Вследствие её засорения приток воды уменьшился на 60%. На сколько процентов вследствие увеличится время, необходимое для заполнения бассейна?

Ответ: 150%

Задача 2. Имеются 2 слитка, содержащие медь. Масса 2 слитка на 3 кг. Больше, чем масса 1 слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10%; во втором – 40%. После сплавления этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30%. Определить массу полученного слитка.

Ответ: 9 кг.

Задача 3. Из турбазы в одном направлении выходят три туриста с интервалом в 30 мин. Первый идёт со скоростью 5 км/ч, второй – 4 км/ч. Третий турист догоняет первого. Найдите скорость третьего туриста.

Ответ: 6 км/ч.

Задача 4. За определённое время на автозаводе должны были собрать 160 автомобилей. Первые 2 ч выполнялась установленная почасовая норма, а затем стали забирать на 3 автомобиля больше. В результате за 1 ч до срока было собрано 155 автомобилей. Сколько автомобилей в час планировали собирать первоначально?

Ответ: 20 автомобилей.

Житейские истории.

Задача 5. Бочонок кваса. Один человек выпивает бочонок кваса за 14 дней, а вместе с женой

выпивает такой же бочонок кваса за 10 дней. Нужно узнать, за сколько дней жена одна выпивает такой же бочонок кваса.

Решение: За 140 дней человек выпьет 10 бочонок кваса, а вдвоем с женой за 140 дней они выпьют 4 бочонка кваса. Значит, за 140 дней жена выпьет $14 - 10 = 4$ бочонка кваса, а тогда один бочонок она выпьет за $140 : 4 = 35$ дней.

Задача 6. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище - столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост весит 1 кг. Сколько весит рыба? (решить с помощью уравнения).

Задача 7. (из книги «Математический кружок» А.В.Спивак, стр.46.).

Четверо товарищей покупают лодку. Первый вносит половину суммы, вносимой остальными; второй - треть суммы, вносимой остальными; третий - четверть суммы, вносимой остальными; четвертый - 130 рублей. Сколько стоит лодка?

СР №1 обучающего характера по теме «Задачи на движение»

В-1. Пешеход, идущий из совхоза на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от совхоза до станции и с какой постоянной скоростью на всем пути пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

РЕШЕНИЕ. Составим таблицу:

	Расстояние, км.	Скорость, км/ч.	Время, ч.
Точно	x	v	$\frac{x}{v}$
С опозданием	$x - 3$	3	$\frac{x - 3}{3}$
С опережением	$x - 3$	4	$\frac{x - 3}{4}$

Заметим, что 15 мин = $\frac{1}{4}$ ч, а 40 мин = $\frac{2}{3}$ ч.

Тогда, уравнивая промежутки времени, записанные в таблице, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{v} = \frac{x - 3}{3} + 1 - \frac{2}{3}, \\ \frac{x}{v} = \frac{x - 3}{4} + 1 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Сравнивая правые части уравнений системы, имеем

$$\frac{x - 3}{3} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{x - 3}{4} + 1 + \frac{1}{4}$$

или

$$4x - 12 + 4 = 3x - 9 + 15, \quad x = 14, \quad \text{тогда } v = \frac{14}{4} = 3,5 \text{ (км/ч)}$$

В-2. Велосипедист и пешеход вышли из пунктов А и В, расстояние между которыми 12 км, и встретились через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт А на 1ч 36 мин позже, чем велосипедист в пункт В. Найти скорость пешехода.

РЕШЕНИЕ. Обозначим через x км/ч скорость пешехода. Тогда 12 км из В в А пешеход пройдет за $12/x$ ч, а велосипедист это же расстояние из А в В на 1ч 36 мин=1,6ч быстрее, т. е. за $12:\left(\frac{12}{x}-1,6\right)$ ч со скоростью $12:\left(\frac{12}{x}-1,6\right)=\frac{12x}{12-1,6x}=\frac{3x}{3-0,4x}$ км/ч. Велосипедист и пешеход, двигаясь навстречу друг другу, расстояние 12 км прошли за $20\text{мин}=\frac{1}{3}$ ч.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{3-0,4x} = 12 \text{ или } 0,4x^2 - 20,4x + 108 = 0, \quad x^2 - 51x + 270 = 0, \text{ откуда } x_1 = 6, x_2 = 45.$$

Значение $x = 45$ невозможно, так как x – скорость пешехода.

Ответ: 6 км/ч.

СР №2 по теме «Задачи на движение»

В-1. Расстояние между городами А и В по шоссе равно 50 км. Из города А в город В отправился велосипедист, а через 1ч 3 мин вслед за ним отправился мотоциклист, который обогнал велосипедиста и прибыл в город В на 1ч раньше его. Найти скорость каждого, зная, что мотоциклист двигался со скоростью в 2,5 раза большей, чем велосипедист.

В-2. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч после отправления поезда встретятся. Если же первый поезд отправится на 4ч 20мин раньше второго, то встреча произойдет через 8ч после отправления второго поезда. Найти скорость каждого поезда.

СР №3 по теме «Задачи на проценты»

В-1. Цену товара сперва снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение ее на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Ответ: на 38,8 %.

В-2. Антикварный магазин, купив два предмета за 225000 руб., продал их, получив 40% прибыли. Что стоит магазину каждый предмет, если на первом прибыли получено 25%, а на втором 50%?

Ответ: 90000 руб., 135000 руб.

СР №4 обучающего характера по теме «Задачи на сплавы, смеси, растворы»

В-1. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

РЕШЕНИЕ.

Пусть было взято x граммов 30% -ного раствора, а 10%-ного - y граммов, тогда $x + y = 600$. Так как первый раствор 30% -ный, то в x граммах этого раствора содержится $0,3x$ грамма кислоты. Аналогично в y граммах 10%-ного раствора содержится $0,1y$ грамма кислоты. В полученной смеси по условию задачи содержится $600 \cdot 0,15 = 90$ г кислоты, следовательно, получим уравнение:

$$0,3x + 0,1y = 90 \text{ или } 3x + y = 900$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим $2x = 900 - 600$; откуда $x = 150$, тогда $y = 600 - 150 = 450$.

Ответ: 150 г, 450г.

В-2. Вычислить массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3кг чистого серебра, получим сплав 900-й пробы (т. е. в сплаве 90% серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получили сплав 840-й пробы.

РЕШЕНИЕ.

Пусть масса данного сплава x кг, в нем содержится y % серебра: $0,01xy$ кг серебра находится в данном сплаве, $(x + 3)$ кг – масса нового сплава, в нем содержится $(0,01xy + 3)$ кг серебра.

Так как новый сплав 900-й пробы, значит, в нем содержится серебра $0,9(x + 3)$ кг. Следовательно, имеем уравнение $0,01xy + 3 = 0,9(x + 3)$.

$(x + 2)$ кг – масса III сплава 840-й пробы. В нем содержится $0,84(x + 2)$ кг серебра. Но этот сплав состоит из x кг данного ($0,01xy$ серебра) и 2 кг 900-й пробы (1,8 кг серебра). Получим второе уравнение: $0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2)$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,01xy + 3 = 0,9(x + 3), \\ 0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2) \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения системы II, получим

$3 - 1,8 = 0,9(x + 3) - 0,84(x + 2)$ или, упрощая, находим $x = 3$. Подставив значение $x = 3$ в I уравнение системы, находим $y = 80$.

Значит, данный сплав массой 3 кг содержит 80% серебра.

Ответ: масса сплава 3 кг 800-й пробы.

СР№5 по теме «Задачи на работу»

В-1. Два экскаватора разной мощности, работая совместно, выполняют работу за 6 часов. Если первый проработает 4 часа, а затем второй 6 часов, то они выполнят 80% всей работы. За какое время каждый экскаватор отдельно может выполнить всю работу?

Ответ: 10ч, 15ч.

В-2. Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно, за 2 ч. За сколько часом может наполнить бассейн I труба, если она, действуя одна, наполняет бассейн на 3ч быстрее, чем II?

Ответ: 3 ч.

СР№6 Решение задач по всему курсу (работа в группах)

1 группа(на производительность) В бассейн проведена труба. Вследствие её засорения приток воды уменьшился на 60%. На сколько процентов вследствие увеличится время, необходимое для заполнения бассейна?

Ответ: 150%

2 группа Имеются 2 слитка, содержащие медь. Масса 2 слитка на 3кг. Больше, чем масса 1 слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10%; во втором – 40%. После сплавления этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30%. Определить массу полученного слитка.

Ответ: 9кг.

3 группа Из турбазы в одном направлении выходят три туриста с интервалом в 30 мин. Первый идёт со скоростью 5 км/ч, второй – 4 км/ч. Третий турист догоняет первого. Найдите скорость третьего туриста.

Ответ: 6 км/ч.

4 группа За определённое время на автозаводе должны были собрать 160 автомобилей. Первые 2 ч выполнялась установленная почасовая норма, а затем стали забирать на 3 автомобиля больше. В результате за 1 ч до срока было собрано 155 автомобилей. Сколько автомобилей в час планировали собирать первоначально?

Ответ: 20автомобилей.

«Рассмотрено»
Руководитель МО
МОУ

Протокол № от. _____

«Согласовано»
Заместитель директора
по УВР

_____ 201 г.

«Утверждено»
Директор
МОУ

Приказ № _____ 201 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
элективного курса по математике
Уровень обучения: основное общее образование
Срок реализации РПП: 1 год
Срок действия программы: 2013-2017

Составил: Мельникова Наталья Николаевна, учитель математики первой
квалификационной категории

Год составления РПП: 2014